Lösung: Serie 8

1. Beispiele

a) Sei $A_n := \mathbb{R}^2 \setminus \big((-n,n) \times (-1,1)\big)$. Dann ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}^2 \setminus \big(\mathbb{R} \times (-1,1)\big) = \big(\mathbb{R} \times (-\infty,-1]\big) \cup \big(\mathbb{R} \times [1,\infty)\big).$$

b) Jede Menge E mit mindestens zwei Elementen, versehen mit der trivialen Topologie.

c) Wie in b).

2. Lokal kompakte Hausdorffräume

(a) Weil E lokal kompakt ist können wir annehmen dass $\overline{U}$ kompakt ist. Denn ansonsten betrachte $U' := U \cap F^o$ wobei F eine kompakte Umgebung von x ist. Dann ist U' offen, $x \in U'$ (denn $x \in F^o$), $\overline{U'} \subset F$ (weil E Hausdorff, ist F abgeschlossen nach Aufgabe 7.4b, also $\overline{U'} \subset \overline{F} = F$) und darum ist $\overline{U'}$ kompakt nach Aufgabe 7.3. Und weil $U' \subset U$, genügt es die Behauptung mit U durch U' ersetzt zu zeigen (Existenz einer kompakten Umgebung N von x mit $N \subset U'$).
Wir wenden nun die Trennungsaussage von Aufgabe 7.4a auf die kompakte Teilmenge ∂U (die Kompaktheit folgt aus Aufgabe 7.3, denn ∂U ist abgeschlossen und $\overline{U}$ ist kompakt nach Annahme) des Hausdorffraum $\overline{U}$ und den Punkt $x \notin \partial U$ (nämlich $x \in U = U^o$) an: es existieren disjunkte relativ offene Teilmengen V, W von $\overline{U}$ mit $x \in V$ und $\partial U \subset W$. Wir behaupten dass wir $N := \overline{V}$ nehmen können. (i) Weil W in $\overline{U}$ offen ist muss $\overline{U} \setminus W$ in $\overline{U}$ abgeschlossen sein, und auch in E (denn $\overline{U}$ ist abgeschlossen). Mit $V \subset \overline{U} \setminus W$ bekommen wir $\overline{V} \subset \overline{\overline{U} \setminus W} = \overline{U} \setminus W \subset \overline{U} \setminus \partial U = U^o$, das heisst $\overline{V} \subset U$. (ii) Weil V in $\overline{U}$ offen ist und $V \subset U$ muss V in U offen sein, also auch in E (denn U ist offen). Aber die Offenheit von V in E zusammen mit $x \in V \subset \overline{V}$ impliziert dass $\overline{V}$ eine Umgebung von x ist. (iii) Als eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{U}$ (nach Annahme) ist $\overline{V}$ kompakt nach Aufgabe 7.3.
(b) Wenn E ein lokal kompakter Hausdorffraum ist und $K \subset U \subset E$ mit U offen, dann können wir, gemäss (a), für jedes $x \in K$ eine kompakte Umgebung N_x von x wählen so dass $N_x \subset U$. Die Umgebungs-Eigenschaft gibt uns dass $\{N_x^o\}_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, also existiert – wegen der Kompaktheit von K – eine endliche Teilüberdeckung $\{N_{x_j}^o\}_{j=1}^n$. Setze $V := \bigcup_{j=1}^n N_{x_j}^o$; dann gilt $K \subset V$, V ist offen und $V \subset \bigcup_{j=1}^n N_{x_j}$. Als eine endliche Vereinigung von kompakten Teilmengen ist $\bigcup_{j=1}^n N_{x_j}$ kompakt und deswegen abgeschlossen (nach Aufgabe 7.4b, denn E ist Hausdorff); folglich gilt $\overline{V} \subset \bigcup_{j=1}^n N_{x_j}$. Dies impliziert $\overline{V} \subset U$ sowie die Präkompaktheit von V (nach Aufgabe 7.3, denn $\bigcup_{j=1}^n N_{x_j}$ ist kompakt).

3. Einpunktkompaktifizierung

(a) Beachte: Im Folgenden bezeichnet $(\cdot)^c$ immer das Komplement in E^* (nicht in E). **(a1)** $(E^*, \mathcal{T}^*)$ ist ein topologischer Raum: Offensichtlich ist $\emptyset \in E^*$. Weiter gilt $E^* \in \mathcal{T}^*$ weil $E^{*c} = \emptyset$ kompakt in E ist. Gegeben sei nun $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}^*$; setze $A_1 := \{\alpha \in A : U_\alpha \in \mathcal{T}\}$, $A_2 := \{\alpha \in A : U_\alpha^c \subset E \text{ ist kompakt}\}$ sowie $U' := \bigcup_{\alpha \in A_1} U_\alpha \in \mathcal{T}$. Wenn $A_2 = \emptyset$ haben wir $\check{U} := \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = U' \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$; wenn $A_2 \neq \emptyset$, dann gilt $\infty \in \check{U}$ und

$$\check{U}^c = (U' \cup \bigcup_{\alpha \in A_2} U_\alpha)^c = (E \setminus U') \cap \bigcap_{\alpha \in A_2} U_\alpha^c$$

ist, als Durchschnitt einer abgeschlossenen Menge und einer kompakten Menge ($E \setminus U'$ ist abgeschlossen in E, und für jedes $\alpha \in A_2$ ist U_α^c kompakt in E, also ist $\bigcap_{\alpha \in A_2} U_\alpha^c$ kompakt in E nach Aufgabe 7.4b – E ist Hausdorff), kompakt in E nach Aufgabe 7.3; darum gilt auch $\check{U} \in \mathcal{T}^*$.
Nun sei $|A| < \infty$, $\hat{U} := \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ and $C := (\bigcap_{\alpha \in A_2} U_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in A_2} U_\alpha^c$; C ist kompakt in E (denn $|A_2| < \infty$). Wenn $A_1 = \emptyset$ dann ist offensichtlich $\hat{U}^c = C$ kompakt in E und $\hat{U} \in \mathcal{T}^*$. Wenn $A_1 \neq \emptyset$ dann gilt

$$\hat{U} = \bigcap_{\alpha \in A_1} U_\alpha \cap (E \setminus C) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$$

weil C kompakt und darum abgeschlossen in E ist (nach Aufgabe 7.4b, E ist Hausdorff).
(a2) $(\mathcal{T}^*)_E = \mathcal{T}$: "$\supset$" ist klar. "$\subset$": Wenn $U \in \mathcal{T}^*$ mit $\infty \in U$, dann gilt nach Definition von $\mathcal{T}^*$ dass U^c in E kompakt ist. Also ist U^c abgeschlossen in E (nach Aufgabe 7.4b, E ist Hausdorff), und darum gilt $U \cap E = E \setminus U^c \in \mathcal{T}$.
(a3) $(E^*, \mathcal{T}^*)$ ist kompakt: Sei $\mathcal{A} \equiv \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von E^*. Wegen $\infty \in E^*$ existiert $\alpha_0 \in A$ so dass $\infty \in U_{\alpha_0}$ und $U_{\alpha_0}^c$ eine kompakte Teilmenge von $(E, \mathcal{T})$ ist. Beobachte dass $\{U_\alpha \cap E\}_{\alpha \in A} \subset (\mathcal{T}^*)_E = \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von E ist, also insbesondere eine der kompakten Teilmenge $U_{\alpha_0}^c$ von E. Daher existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ so dass $\bigcup_1^n U_{\alpha_i} \supset \bigcup_1^n (U_{\alpha_i} \cap E) \supset U_{\alpha_0}^c$. Folglich ist $\{U_{\alpha_i}\}_0^n$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{A}$, was die Kompaktheit von E^* beweist.
(b) **["$\Leftarrow$"]** Seien $x, y \in E^*$ mit $x \neq y$. Wir zeigen dass die Punkte x, y durch disjunkte offene Umgebungen getrennt werden können. Weil $(E, \mathcal{T})$ Hausdorff ist und $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$, können wir annehmen dass $x \in E$ und $y = \infty$. Wegen lokaler Kompaktheit von E existiert eine kompakte Umgebung C von x (bezüglich $\mathcal{T}$). Dann ist $\infty \in E^* \setminus C =: U$ und U ist offen. Also sind C^o und U offene Umgebungen von x respektive ∞ mit $C^o \cap U = \emptyset$. **["$\Rightarrow$"]** Sei $x \in E$. Weil E^* Hausdorff ist existieren disjunkte $U, V \in \mathcal{T}^*$ so dass $x \in U$ und $\infty \in V$. Nach Definition von $\mathcal{T}^*$ ist V^c compact in E, und weiter gilt $x \in U \cap E \subset V^c$ mit $U \cap E \in (\mathcal{T}^*)_E = \mathcal{T}$. Also ist V^c eine kompakte Umgebung von x in E.

(c) E ist dicht in $(E^*, \mathcal{T}^*)$ $\Leftrightarrow$ $E \cap U \neq \emptyset$ für jede nichtleere Menge $U \in \mathcal{T}^*$ $\Leftrightarrow$ $\{\infty\} \notin \mathcal{T}^*$ $\Leftrightarrow$ $E = \{\infty\}^c$ ist nicht kompakt.

In Aufgabe 4.4 haben wir mit stereographischer Projektion gesehen dass $E := \mathbb{R}^n$ homöomorph zu $S^n \setminus \{N\}$ ist, wobei $N := (0, \ldots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ den "Nordpol" in S^n bezeichnet. Nun identifizieren wir auch noch $* \in E^* = (\mathbb{R}^n)^*$ mit $N \in S^n$; jetzt haben wir also eine Bijektion von S^n nach $(\mathbb{R}^n)^*$ deren Einschränkung auf $S^n \setminus \{N\}$ die stereographische Projektion ist. Die offenen Mengen in S^n sind jedoch genau die Mengen mit kompaktem Komplement; dies folgt aus den Aufgaben 7.3 & 7.4b, denn S^n ist kompakt und Hausdorff. Damit entsprechen die offenen Mengen in S^n welche N enthalten unter obiger Bijektion genau den offenen Mengen in der Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ welche $*$ enthalten. S^n ist somit homöomorph zu $(\mathbb{R}^n)^*$.